NOTICE

SUR LES

TITRES ET TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. MAURICE LEVY.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1880

NOTICE

SUR LES

TITRES ET TRAVAUX SCIENTIFIQUES.

PRINCIPALES DATES DE LA CARRIÈRE DE L'AUTEUR.

Entré à l'École Polytechnique	1856
Élève-ingénieur des Ponts et Chaussées	1858
Répétiteur auxiliaire de Mécanique à l'École Polytechnique, année scolaire	1861 - 1862
Pris du service actif comme ingénieur des Ponts et Chaussées	1862
Docteur ès sciences	1867
Médaille d'or aux *Annales des Ponts et Chaussées*	1867
Prix Dalmont	1870
Remplaçant au Collège de France	1874
Professeur à l'École Centrale	1875
Examinateur d'admission à l'École Centrale	1876
Suppléant au Collège de France	1877
Prix Poncelet	1878
Membre de la Commission du nivellement général de la France	1879
Président de la Société Philomathique	1880

Présentations par la Section de Mécanique.

En deuxième ligne le 18 mars 1872.
En deuxième ligne le 13 mai 1872.
En troisième ligne le 26 mai 1873.

Principaux travaux publiés depuis cette dernière élection.

Publication d'un Ouvrage sur la Statique graphique.

Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes.

Mémoire sur l'application de la théorie mathématique de l'élasticité à l'étude des systèmes de barres élastiques.

Sur les équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes.

Théorie analytique et Théorie mécanique de la chaleur (tout le § V).

Cinématique (tout le § VI).

Cinq Communications sur le problème des lignes géodésiques considéré comme problème de Mécanique.

Sur la réduction de l'équation donnée par Cayley pour exprimer qu'une famille de surfaces peut faire partie d'un système orthogonal.

Nouveau siphon établi pour le passage de l'égout collecteur de Bercy *par-dessus* le canal Saint-Martin.

Balayeuse mécanique chasse-neige (système Maurice Levy, construit pour le service de la ville de Paris).

Divers travaux d'ingénieur classés au § X.

Titres et dates des Mémoires et Travaux.

I. — Résistance des Matériaux.

II. — Hydrodynamique et Hydraulique.

III. — Théorie mathématique de l'élasticité.

IV. — Statique graphique.

V. — Théorie analytique et Théorie mécanique de la chaleur.

VI. — Cinématique pure.

VII. — Géométrie.

VIII. — Mécanique analytique et Analyse.

IX. — Applications diverses de la Mécanique.

X. — Indication de quelques travaux d'ingénieur.

TRAVAUX.

I. — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

Sur la résistance des ponts à poutres droites continues (1861).

L'étude de la résistance des poutres droites continues se faisait autrefois en discutant séparément tous les cas de surcharge possibles, au nombre de $2^n - 1$, pour une poutre à n travées.

Nous avons fait cette remarque que, en appliquant le principe de la superposition des effets des forces élastiques, il suffit de discuter les n cas où chaque travée est chargée seule, les autres étant vides, pour en déduire ensuite tous les cas par de simples additions.

De la sorte, pour une poutre à 7 travées, on n'a plus à discuter que 7 cas, au lieu de $2^7 - 1 = 127$.

Depuis, M. Bresse a tiré un très heureux parti de cette considération, ainsi qu'il a bien voulu le dire dans le passage suivant de son troisième Volume de *Mécanique appliquée :*

« M. Levy (Maurice), ingénieur des Ponts et Chaussées, a indiqué, » dans un concours de Mécanique appliquée fait pendant son séjour à » l'École, un moyen très élégant pour éviter une telle discussion : c'est » de construire les lignes représentatives des moments dans l'hypo- » thèse où chaque travée est chargée seule, la charge permanente » étant de plus supprimée, puis d'ajouter en chaque point de la fibre » moyenne, d'une part toutes les ordonnées positives, d'autre part

» toutes les ordonnées négatives; les deux sommes ne sont autre
» chose que les deux moments limites produits par toutes les com-
» binaisons possibles de surcharge.

» Cette idée est des plus ingénieuses; elle se présente comme une
» conséquence si naturelle et si évidente du principe de la superposi-
» tion des effets des forces, qu'on est presque étonné de ne pas l'avoir
» rencontrée plus tôt; mais c'est un sentiment que l'on éprouve à
» propos de toutes les choses, parfois d'une véritable importance, qui
» comptent la simplicité au nombre de leurs mérites. Toujours est-il
» que M. Levy n'a pas tiré de sa méthode les conséquences qu'elle ren-
» fermait en germe et auxquelles nous sommes arrivé en employant
» son procédé comme moyen de recherche et de démonstration. »
(Bresse, *Cours de Mécanique appliquée professé à l'École des Ponts et Chaussées*, t. III, p. XIII de l'Avant-Propos.)

Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement (1869) [1].

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences des 21 juin 1869 et 7 février 1870.
Journal de Mathématiques pures et appliquées de M. Resal, t. XV.
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques de M. Darboux, t. VI, p. 137.

La théorie de l'équilibre d'un massif de terre de forme prismatique reposait sur l'hypothèse de Coulomb qui consiste à admettre que, si un tel massif est sur le point de se rompre, les surfaces de rupture sont des plans parallèles aux arêtes du prisme.

Le but de ce Mémoire est, comme l'indique son titre, de montrer que le problème est soluble par voie rationnelle, sans hypothèse, et d'examiner ensuite quel est le cas le plus général où l'hypothèse de Coulomb peut se réaliser.

Ce problème comporte quatre fonctions inconnues, à savoir : les composantes, parallèlement à deux axes de coordonnées tracées dans une section droite du massif, des pressions exercées sur deux

[1] Mémoire dont l'insertion au *Recueil des Savants étrangers* a été votée le 7 février 1870, sur le Rapport d'une Commission formée de MM. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, de Saint-Venant rapporteur.

éléments parallèles à ces mêmes axes pris en chaque point de la section.

Entre ces quatre forces, la Statique fournit trois équations d'équilibre (deux de projection et une de moments).

Pour trouver une quatrième équation et en déduire la forme véritable, plane ou non, des surfaces de rupture, nous considérons, avec Coulomb, la masse pulvérulente sur le point de se rompre en tous sens, dans un état que nous appelons l'*état d'équilibre limite*.

Pour tout élément tangent à une ligne de rupture, l'inclinaison de la pression sur la normale à l'élément est alors connue : c'est l'angle de frottement de la matière considérée, sur elle-même. Pour tout autre élément, l'inclinaison de la pression sur la normale à l'élément est, au contraire, inférieure à l'angle de frottement, puisque, le long d'un tel élément, la masse n'est pas sur le point de glisser.

Donc, si en chaque point on cherche l'élément ou les éléments (il y en a deux) pour lesquels cette inclinaison est maxima, et qu'on écrive que la valeur de cette inclinaison maxima est partout égale à l'angle du frottement, on aura la quatrième équation cherchée.

Cette quatrième équation est l'équation différentielle même des lignes de rupture Nous montrons qu'elles ne peuvent être droites, comme l'admet Coulomb, que dans le cas très particulier, mais heureusement très pratique, d'un massif terminé par un talus plan indéfini.

Dans le cas général, nous montrons que la solution du problème exige l'intégration d'une équation à dérivées partielles du second ordre, avec conditions données à la surface.

La seconde partie du Mémoire est le développement de cette solution.

Depuis que notre travail est publié, le regretté Rankine nous a envoyé un Mémoire antérieur au nôtre, conçu dans un ordre d'idées analogue.

Toutefois, la théorie de l'éminent professeur anglais se distingue de la nôtre en ce qu'elle repose sur une base contestée, comme on en peut juger par le passage suivant d'une Note publiée aux *Comptes rendus*, par M. de Saint-Venant, en réponse à diverses objections de M. le commandant Curie :

« J'observerai d'abord, dit M. de Saint-Venant, que M. Levy n'a pas

» été le seul qui ait professé les principes si explicitement repoussés » par M. Curie. M. Levy dit en avoir puisé la première idée dans le » *Traité de la Stabilité des constructions* publié en 1857, à Brunswick, » par le Dr Scheffler, qui n'en a fait l'application qu'au cas le plus » simple. Déjà, en 1856, l'éminent et regretté Macquorn Rankine, dont » M. Levy n'avait pas connu le Mémoire, avait eu et appliqué d'une » manière plus étendue la même idée et était arrivé à la plus grande » partie des formules nouvelles, *mais en s'appuyant, comme M. Scheffler, sur un principe obscur et contestable*, dit *de moindre résistance* (1), » dont M. Levy s'est passé en considérant directement, comme Coulomb, l'équilibre limite précédant le renversement. » (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1873, p. 234.)

D'autre part, Rankine applique les formules trouvées pour un massif à talus indéfini à la poussée contre un mur d'obliquité quelconque, sans exprimer aucune *condition à la surface* le long de ce mur. M. Resal dit à cette occasion, dans son beau Mémoire *Sur la poussée des terres et la stabilité des murs de soutènement* :

« Rankine commet deux erreurs en traitant le cas d'un simple talus. » Il suppose d'abord, lorsque le massif est indéfini dans tous les sens, » que la pression sur un plan parallèle au plan du talus lui est normale et est égale au poids du prisme vertical construit sur l'élément. La seconde partie de cet énoncé est inexacte; car il résulte » de la théorie de M. Maurice Levy qu'il faut substituer au prisme de » Rankine le prisme normal à l'élément. »

M. Resal ajoute : « Par une analyse rigoureuse, M. Maurice Levy a » démontré que cette hypothèse (hypothèse de la rupture plane) ne » se réalise, dans le cas où la partie supérieure du massif est plane, » qu'à la condition que l'inclinaison du parement est une fonction déterminée de la pente du talus et des angles de frottement de la terre » sur elle-même et contre le mur. » [Resal, *Poussée des terres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, avril 1877, p. 116.)]

Rankine ne tient pas compte de cette condition.

Les conclusions de la Commission chargée de l'examen de notre Mémoire sont : « Nous pensons donc qu'à tous égards le Mémoire de

(1) Passage souligné par M. Maurice Levy.

» M. Levy est digne de la haute approbation de l'Académie, et nous en » proposons l'insertion au *Recueil des Savants étrangers.* »

Enfin, dans son Rapport sur le prix Dalmont, en 1870, M. de Saint-Venant dit, en parlant du Mémoire dont il s'agit ici : « Ce Mémoire » justifie son titre; car, au lieu de partir de la supposition ordinaire » et souvent fausse de rupture plane, les recherches de M. Levy s'ap- » puient sur une base n'ayant rien d'arbitraire. » (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1873, p. 133.)

Sur la résistance des cloches de gazomètres sous l'action du vent

Annales des Mines, 1878.

Travail qui nous a été demandé par M. l'ingénieur en chef du service de l'éclairage de la ville de Paris. Il peut offrir quelque intérêt pour les ingénieurs. C'est ce qui nous a déterminé à le publier.

Sur la théorie des poutres droites continues.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 22 mars 1875, p. 747.
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques de M. Darboux, t. VIII, p. 167.
Collignon, Résistance des Matériaux, 1877, p. 362.

Voici en quels termes il est rendu compte de cette Note au *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques :*

« L'auteur indique un moyen fort simple de déterminer les moments » fléchissants, qui s'appuie sur le théorème suivant :

« *Quel que soit le nombre n des appuis d'une poutre, et les appuis » extrêmes étant ou non à encastrement, si l'on connaît le moment flé- » chissant en un seul point* U *de la pièce, on peut trouver le moment flé- » chissant en un point de chacun des n* — 1 *travées autres que celle qui » contient le point* U, *par la résolution de n systèmes composés chacun » de deux équations seulement du premier degré à deux inconnues.* »

Le but de ce théorème est de fournir une solution purement graphique du problème.

La méthode de Clapeyron, qui consiste à chercher d'abord les moments fléchissants sur les appuis, exige, pour une poutre à *n* travées,

la résolution d'un système de $n-1$ équations simultanées du premier degré qui ne se prêteraient pas facilement à une construction géométrique, tandis que nos systèmes *successifs* d'équations donnent lieu à une construction analogue à celle de Savary pour la détermination du rayon de courbure d'une roulette, construction à effectuer pour chaque travée.

II. — HYDRODYNAMIQUE ET HYDRAULIQUE.

Théorie d'un courant liquide à filets rectilignes et parallèles (1867).

Essai théorique et appliqué sur le mouvement des liquides (1867).

Mémoire sur l'hydrodynamique des liquides homogènes et particulièrement sur leur écoulement rectiligne et permanent (1869).

Annales des Ponts et Chaussées, 2e livraison, 1867.
Idraulica matematica e pratica, par E. Nazzani, professeur à l'Institut technique de Reme, t. II, de la page 42 à la page 61. (Exposé complet du premier Mémoire ci-dessus.)
Collignon, Hydraulique, p. 164.
Bresse, Hydraulique, p. 133.

Le premier de ces Mémoires a obtenu la médaille d'or aux *Annales des Ponts et Chaussées*.

Le deuxième a été présenté comme Thèse pour le doctorat ès sciences à la Faculté des Sciences de Paris, en février 1867. Le Rapport de M. Chasles, président du jury, porte : « Aussi les deux thèses de » M. Levy nous ont paru mériter une approbation complète exprimée » par six boules blanches. »

Le troisième, présenté à l'Académie des Sciences, a obtenu l'insertion au *Recueil des Savants étrangers* dans la séance du 8 mars 1869, sur le Rapport de la Commission désignée plus haut.

Le soussigné n'a pas la prétention d'avoir, dans ces travaux, résolu le difficile problème du mouvement des fluides. Il a surtout essayé d'examiner à fond le cas du mouvement rectiligne et permanent comme application de formules plus générales.

Il a observé d'abord que, si l'on admet *a priori* que l'action mutuelle de deux filets fluides ne dépend que de leur vitesse relative $\frac{dv}{dn}$, elle ne peut pas être proportionnelle au carré de cette quantité, suivant une conclusion que M. Darcy avait cru pouvoir tirer de ses belles expériences sur le mouvement de l'eau dans les conduites; elle ne peut qu'être proportionnelle à la simple puissance de cette quantité, le coefficient de proportionnalité pouvant varier d'un point à un autre du fluide, mais non, en un même point, avec la direction de l'élément linéaire normal à dn.

Ce premier résultat avait déjà été obtenu en 1843 par M. de Saint-Venant.

Le soussigné observe ensuite que l'hypothèse même consistant à admettre *a priori* que l'action de deux filets voisins ne dépend que des dérivées premières de la vitesse, paraît en désaccord avec certains faits, notamment avec ce fait que, dans les cours d'eau, le filet de vitesse maxima n'est pas à la surface même, mais à une profondeur plus ou moins grande suivant la vitesse de l'eau. Il a alors essayé, à l'exemple de ce qu'a fait Cauchy en Optique pour étudier la dispersion de la lumière, d'introduire les dérivées d'ordre supérieur de la vitesse. Il a donné l'expression la plus générale du frottement entre deux filets fluides en introduisant les dérivées de tous les ordres; puis, se bornant à l'introduction des dérivées du second ordre, il a obtenu des résultats concordant, d'une manière complète, avec les expériences de M. Bazin sur les canaux découverts.

Il retrouve ainsi théoriquement la formule même par laquelle M. Bazin a empiriquement traduit ses expériences.

Cette concordance suffit-elle à justifier la théorie? Elle constitue évidemment un fait digne d'être pris en considération.

Le soussigné ne se dissimule pas qu'on peut lui objecter que le cas idéal d'un courant à filets rigoureusement rectilignes, le seul auquel il ait pu appliquer ses formules, est loin de se produire dans la réalité,

même dans les cours d'eau les plus réguliers, dès que la vitesse est un peu considérable.

Mais, lorsqu'en Optique on commence par négliger dans une première étude approchée un phénomène aussi capital, aussi considérable dans ses effets que la dispersion de la lumière, on n'est pas plus près de la réalité qu'ici lorsqu'on néglige les changements plus ou moins brusques qui peuvent se produire périodiquement dans le mouvement de l'eau. Il faut bien, dans la Science, commencer par les cas les plus simples, surtout dans un problème aussi complexe. Telle est aussi l'opinion de M. le professeur Nazzani, comme le prouvent les réflexions suivantes par lesquelles il fait précéder l'exposé de l'un de nos Mémoires dans son *Idraulica matematica e pratica :*

« Levy, che a dato alla scienza nuovi importantissimi lavori anali-
» tici su diversi argomenti, si accinse anche a cercare le leggi che
» governano il moto dell'acqua : 1° studiando dapprima in modo rigo-
» roso il moto dell'acqua a filetti rettilinii, onde impadronirsi del
» termine più importante della lege cercata; 2° ponendo poscia a com-
» puto le differenze esistenti fra il moto ipotetico e quello reale effet-
» tivamente seguito in natura, a fine di farsi di tal guisa, con suc-
» cessive approssimazioni, a discernere i termini secondarj. Questo
» metodo e infatti fecondo di ottimi risultamenti; inaugurato dagli
» astronomi, i quali imprendono a studiare il moto d'una pianeta
» astraendo dalla coesistenza degli altri, perindi analizzare successi-
» vamente le perturbazioni promossi dalle scambievoli attrazioni,
» venne anche applicato per via esperimentale e razionale alla Fisica
» ove fù invero motore di splendidi progressi ([1]). » (*Idraulica matema-*
» *tica e pratica*; Palermo, L.-P. Lauriel, editore, t. II, p. 42.)

([1]) Levy, qui a enrichi la Science de travaux analytiques très importants sur des sujets divers, s'est proposé de chercher la loi qui régit le mouvement de l'eau : 1° en étudiant d'abord le mouvement par filets rectilignes et parallèles comme fournissant le terme le plus important de la loi cherchée; 2° en cherchant ensuite les termes secondaires, par comparaison avec ce qui se passe dans la nature. Cette méthode, inaugurée en Astronomie, est tres féconde, etc.

III. — THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ.

Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes.

Journal de Mathématiques pures et appliquées de M. Resal, juillet, août et septembre 1877.
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences des 26 mars, 30 avril, 31 décembre 1877 et 4 février 1878.

Afin d'arriver à appliquer les équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité au problème des plaques minces, sur la solution duquel Kirchhoff et Poisson se trouvent en désaccord, et dont Cauchy n'a traité qu'un cas particulier, apercevant là une difficulté à laquelle il n'a pas jugé à propos de s'arrêter ([1]), nous n'en avons pas fait dès l'abord un problème de simple approximation.

Nous avons commencé, et c'est par là que notre travail se sépare de ceux qui l'ont précédé, par traiter un problème rigoureux que nous allons définir.

Pour l'étude rigoureuse du problème de l'équilibre ou du mouvement d'une plaque, il faudrait, comme conditions à la surface, exprimer que les forces élastiques doivent être : 1° nulles sur les deux bases; 2° égales et opposées à des pressions données en chaque point de sa surface latérale.

Mais les géomètres qui ont traité de la question (et sur ce point ils se sont tous trouvés d'accord, depuis Navier jusqu'à Kirchhoff), profitant de la faible épaisseur de la plaque, ont conduit leurs calculs d'approximation de façon à conserver, dans leurs équations finales, non

([1]) Cela résulte d'un passage de son Mémoire où, parlant d'une équation de Poisson, il dit qu'elle lui semble donner lieu « à quelques difficultés ». C'est sans doute ce qui l'a déterminé à ne traiter que le cas où les pressions sur le pourtour de la plaque sont normales. (Voir *Exercices d'Analyse*, 1828, t. III, p. 346.)

pas les pressions individuelles appliquées en *chacun* des points du cylindre de pourtour, mais seulement la résultante de translation et le couple résultant de celles de ces pressions appliquées le long de chaque petite génératrice rectiligne de ce cylindre, ces pressions étant supposées composées comme si elles agissaient le long de lignes rigides.

Cette remarque nous a conduit à poser d'abord cette question :

On a un cylindre droit élastique de hauteur finie quelconque sur les bases et la masse entière duquel n'agissent pas de forces; sur sa surface latérale, on exerce des pressions qu'on ne définit que *partiellement*, en se donnant la résultante de translation et le couple résultant de celles d'entre elles qui agissent le long de chaque génératrice du cylindre, et l'on propose de mettre à profit l'indétermination qui subsiste dans le mode de répartition de ces pressions, pour obtenir une solution *rigoureuse* du problème de l'équilibre élastique du cylindre.

On voit de suite que, si l'on réussit à trouver une telle solution, on en déduira, sans aucune incertitude, une solution approchée pour les plaques minces; il suffira d'introduire, dans les formules obtenues, la circonstance que la hauteur du cylindre, supposée d'abord finie, devient très petite, et à la traiter comme si elle était infiniment petite.

La différence entre cette méthode et celle suivie jusqu'ici consiste donc en ce que nous ne mettons à profit la faible épaisseur de la plaque que dans les formules finales; nous n'en tenons pas compte *pendant* l'intégration, mais seulement quand cette opération est terminée; tandis que les géomètres qui nous ont précédé ont, dès le début, introduit cette circonstance dans les équations différentielles partielles même qu'il s'agissait d'intégrer, ainsi que dans les diverses conditions à la surface, soit sur les bases, soit sur le pourtour du cylindre. Or, c'est de là que naissent des points délicats que nous avons, dans la première partie de notre Mémoire, cherché à préciser pour en tirer l'explication de la divergence qui existe entre la solution de Poisson et celle de Kirchhoff.

Parmi les solutions qu'il paraît possible d'obtenir, il est naturel de chercher d'abord s'il en existe une qui soit algébrique, entière et d'un degré n plus ou moins élevé, mais fini, par rapport à la coordonnée z parallèle à la hauteur du cylindre que nous considérons. Par conséquent, le problème se pose ainsi :

Est-il possible de répartir, le long de chaque génératrice de la surface latérale d'un cylindre de hauteur finie, un système de pressions dont la résultante de translation et le couple résultant sont seuls donnés, de façon que toute ligne matérielle prise à l'intérieur du cylindre et primitivement parallèle à ses génératrices se transforme rigoureusement, par suite du déplacement élastique, en une courbe parabolique d'un degré entier n quelconque, mais fini?

Pour résoudre ce problème, nous commençons par développer les trois fonctions inconnues (composantes u, v, w du déplacement élastique d'un point) qui entrent dans les équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité en séries suivant les puissances ascendantes de la coordonnée z, et nous donnons la loi de formation du terme général de la série : 1° pour chacune de ces inconnues; 2° pour les six composantes des pressions.

Ce développement donne lieu à une première remarque intéressante au point de vue du Calcul intégral et importante au point de vue du problème des plaques.

Comme le développement porte sur trois fonctions satisfaisant à trois équations différentielles partielles du second ordre, il semble qu'il devra y entrer six fonctions arbitraires des deux autres coordonnées x et y, et seulement six.

Il se trouve qu'outre ces six fonctions il s'en introduit encore une septième, qui n'est pas entièrement arbitraire, mais qui est liée aux autres par une équation à dérivées partielles du second ordre; qui, par suite, comporte elle-même encore de certaines arbitraires.

Au point de vue du Calcul intégral, cela prouve une fois de plus combien il est difficile de prévoir ce qu'il entrera d'arbitraires dans les équations intégrales d'un système d'équations à dérivées partielles d'ordre supérieur au premier, même lorsqu'on cherche une solution de forme aussi particulière que celle dont il s'agit ici (algébrique par rapport à l'une des variables).

Au point de vue du problème des plaques, il se trouve que la septième fonction qui s'introduit de la sorte est l'abaissement vertical (parallèle à l'axe des z) d'un point quelconque de la section droite du cylindre considéré, équidistante des bases (et prise pour plan des xy). Or cette fonction, dans la manière habituelle de traiter la flexion des

plaques minces, est l'inconnue unique dont on fait dépendre tout le problème.

C'est l'équation qui, d'après notre analyse, relie ainsi rigoureusement cette fonction avec les six fonctions arbitraires, et qu'on trouve en termes finis, même quand on a égard, comme nous, aux séries complètes, équation que tous les géomètres qui ont traité de la question devaient, par suite, forcément rencontrer aussi dans leurs calculs approchés, qui explique très nettement comment tous, alors même qu'ils se trouvent en désaccord sur les conditions à la surface, se soient trouvés d'accord sur l'équation à dérivées partielles régissant la fonction inconnue de leur problème.

Après avoir trouvé ainsi les séries complètes qui régissent les déplacements et les forces élastiques, nous avons cherché les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces séries se limitent d'elles-mêmes aux termes de puissance égale ou inférieure à un nombre donné n.

Nous trouvons pour cela six conditions entre les six fonctions de x et de y, restées jusqu'ici arbitraires dans notre développement; ces conditions sont des équations à dérivées partielles d'ordre $2n$ qu'il faut joindre à l'équation du second ordre dont il est parlé ci-dessus.

Nous exprimons enfin que les pressions sur les deux bases du cylindre sont rigoureusement nulles, ce qui nous donne six nouvelles équations à dérivées partielles d'ordre $2n$ entre ces mêmes fonctions, de sorte qu'en définitive, pour qu'une ligne primitivement droite, prise à l'intérieur du cylindre, puisse se transformer rigoureusement en une parabole du degré n, il faut et il suffit que certaines fonctions, au nombre de *sept*, satisfassent simultanément à *treize* équations à dérivées partielles, dont douze de l'ordre $2n$ et une du second ordre. Nous avons réussi à donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces équations admettent des solutions communes, et à définir ces solutions communes par un système d'équations n'ayant plus rien de surabondant.

Les résultats que nous obtenons sont ceux-ci : 1° le problème est toujours impossible si $n > 3$, c'est-à-dire que, en aucun cas et quelles que soient les forces agissant sur la surface latérale du cylindre, une droite ne peut se transformer en une courbe algébrique d'un degré supérieur au troisième; c'est là un résultat très curieux, que rien assurément ne pouvait faire prévoir; 2° si $n \leqq 3$, le problème n'est possible

que si, entre la résultante de translation et le moment résultant des pressions agissant le long de chaque génératrice, il existe une certaine relation.

Ainsi, rigoureusement, il est en général impossible de répartir des pressions dont la résultante de translation et le moment résultant sont donnés arbitrairement, non seulement de façon que les lignes matérielles parallèles aux génératrices du pourtour de la plaque restent droites, mais même de façon qu'elles se transforment en des courbes paraboliques d'un degré fini, si élevé qu'on le suppose.

Nous cherchons donc, outre la solution algébrique, une autre solution. En les réunissant, on a des équations qui conviennent rigoureusement à une infinité de cas d'équilibre des corps cylindriques et dont les solutions comportent cinq fonctions arbitraires et permettent de se donner arbitrairement la résultante de translation et le moment résultant des pressions appliquées sur chacune des génératrices du cylindre.

Si l'on suppose maintenant que la hauteur du cylindre devienne infiniment petite, les formules (qui se simplifient notablement) conviendront au problème des plaques.

Après avoir mis ainsi le problème en équation, en faisant abstraction des forces telles que la pesanteur agissant sur la masse entière de la plaque, pour introduire ces forces sans reprendre des calculs qui deviendraient extrêmement compliqués, nous employons une méthode qui constitue une sorte d'extension de la méthode de la variation des constantes arbitraires; elle pourrait se nommer la méthode de la variation de la forme des fonctions arbitraires. Elle consiste en effet à modifier la forme des diverses fonctions qui entrent dans nos équations de façon telle que, sans cesser de satisfaire aux conditions sur les bases qui ne changent pas, elles puissent satisfaire aux nouvelles équations d'équilibre intérieur résultant de l'introduction des forces agissant sur la masse de la plaque et aux nouvelles conditions sur la surface latérale.

Une fois les forces proportionnelles aux masses introduites, le théorème de d'Alembert fournit les équations du mouvement.

Nous appliquons notre théorie à une étude complète de l'équilibre et du mouvement de la plaque circulaire, soit libre, soit appuyée, soit

encastrée sur son pourtour. Dans le cas de l'équilibre, nos formules permettent de calculer en termes finis la flèche au centre de la plaque appuyée ou encastrée, quelle que soit la répartition des forces extérieures; dans le cas du mouvement, le mouvement vibratoire du centre de la plaque ne dépend que des valeurs moyennes des déplacements et des vitesses sur chacune des circonférences concentriques à la plaque et non des déplacements et vitesses de chaque point en particulier.

Enfin, si l'on suppose tout symétrique autour du centre, nos formules coïncident avec celles de Poisson, qui, dans ce cas particulier, le seul qu'il ait traité, se trouvent satisfaire à toutes les conditions du problème.

Mémoire sur l'application de la théorie mathématique de l'élasticité à la recherche des tensions dans les systèmes de barres articulées et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, offrent la plus grande résistance possible.

(Publié à la suite de notre Ouvrage de Statique graphique, Note II, p. 236 à 323.)
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 28 avril 1873, p. 1059.
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques de M. Darboux, t. V, p. 137, et t. VIII, p. 16 et 17.

Voici comment M. Darboux apprécie ce travail dans le compte rendu qu'il donne de notre Ouvrage de Statique graphique :

« La Note II est particulièrement intéressante; elle constitue un » Mémoire original sur la recherche des tensions dans les systèmes » de barres élastiques et sur les systèmes qui, à volume égal de ma- » tière, offrent la plus grande résistance possible. Les résultats de cette » recherche nous paraissent très élégants. Ils peuvent être résumés » dans les trois propositions suivantes :

» Pour qu'un système de m barres en équilibre sous l'action de forces » données puisse être constitué en solide d'égale résistance, il faut, en » général, et il suffit toujours que la figure géométrique formée par » les axes de ces barres ne contienne pas de lignes surabondantes.

» Toutes les fois qu'une figure formée de m lignes et contenant

» k lignes surabondantes peut être constituée en solide d'égale résis-
» tance, elle le peut d'une k^{tuple} infinité de manières.

» Lorsqu'un système de barres contenant des lignes surabondantes » satisfait aux conditions nécessaires pour qu'on puisse d'une manière, » et par suite d'une infinité de manières, le constituer en solide d'égale » résistance, il existe nécessairement un système formé par une partie » seulement des barres données, ne contenant pas de lignes surabon- » dantes et tel que, disposé en système d'égale résistance, il dépense » exactement le même volume de matière que le système complet.

» L'auteur termine en appliquant ces résultats aux différents sys- » tèmes de poutres; les conclusions qui résultent de ces calculs sont » extrêmement nettes et donnent des indications très précises sur la » valeur des différents systèmes. » (*Bulletin des Sciences mathématiques* » *et astronomiques*, t. VIII, p. 17.)

Les conclusions auxquelles M. Darboux fait allusion et que nous formulons à la fin de notre Mémoire, après avoir comparé les poutres les plus récentes construites en Europe et aux États-Unis, sont celles-ci :

« 4° Ainsi, à quelque point de vue qu'on se place, le système à triangles est supérieur au point de vue économique au système Fink et plus encore au système Bollman; d'un autre côté, nous avons vu, dans la théorie générale des systèmes d'égale résistance, qu'il est nécessairement plus économique que les systèmes à croix de Saint-André et à treillis, et il résulte aussi de cette théorie qu'il est plus économique que les systèmes Jones, Linville, Murphy-Whipple, etc., qui tous dérivent des systèmes à treillis ou à croix de Saint-André et contiennent les mêmes lignes surabondantes que ces derniers (seulement en moins grand nombre); nous pouvons donc conclure que la poutre à triangles, et en particulier celle à triangles isoscèles, est, au point de vue où nous nous sommes placé, la meilleure des poutres connues.

» 5° Il se peut qu'on découvre des systèmes mieux disposés encore; mais on devra, en tous cas, les chercher parmi les figures géométriques ne contenant pas de lignes surabondantes; car, étant donné un système à lignes surabondantes, on peut toujours (théorème V) trouver un système sans lignes surabondantes plus (ou pour le moins aussi) économique que lui.

» 6° Si l'on ajoute à cela que les systèmes sans lignes surabondantes sont (théorème I) les seuls dont les tensions puissent être calculées à l'aide des principes de la Statique élémentaire, que, par suite, les calculs sont plus sûrs et plus simples que ceux de la Résistance des matériaux; qu'ils peuvent d'ailleurs être remplacés par les procédés si commodes et si expéditifs de la Statique graphique; si l'on ajoute encore que les systèmes sans lignes surabondantes, par cela seul qu'ils renferment un moins grand nombre de pièces, comportent des pièces plus robustes, plus faciles à assembler, moins sujettes à être affaiblies par l'oxydation ou la pourriture, moins sensibles aux trépidations, moins exposées à être faussées lors de la pose ou à être affamées par les pièces d'assemblage, on reconnaîtra qu'il y a véritablement intérêt, en cette matière, à se conformer très scrupuleusement aux préceptes de la théorie. Il est peu de questions où elle fournisse des résultats aussi simples, aussi conformes au bon sens, aussi faciles et aussi utiles à mettre en application. » (Maurice Levy, *Statique graphique*, Note II, p. 322).

Nous avons été heureux de voir que ces conclusions, après avoir reçu l'approbation d'un géomètre aussi éminent que M. Darboux, viennent d'être de tout point confirmées par les observations de deux praticiens des plus distingués, M. l'ingénieur en chef des Ponts et Chaussées Lavoinne, envoyé en mission par le Gouvernement français à l'Exposition de Philadelphie, et M. l'ingénieur Pontzen; ces deux ingénieurs viennent de publier les observations qu'ils ont faites aux États-Unis, à l'occasion de leur séjour à l'Exposition, dans un Ouvrage considérable : *Les chemins de fer en Amérique* (Paris, Dunod, 1880).

Et voici ce que nous lisons dans le Chapitre relatif aux ouvrages d'art, page 254 :

« On peut dire en définitive ... que, à égalité d'effort maximum, une ferme à articulations dont toutes les pièces seraient exécutées et assemblées avec une grande précision, et où l'on aurait, » en outre, pris des dispositions convenables pour maintenir l'uniforme répartition des efforts que ce système a pour but de réaliser, » comporte un emploi beaucoup mieux entendu de la matière et présente plus de chances de durée qu'une ferme à treillis rivé, d'une exécution également parfaite. » (*Les chemins de fer en Amérique*, p. 254.)

Ce sont exactement, tirées de l'observation des faits, les conclusions rapportées plus haut et auxquelles la théorie nous avait conduit dès 1874, avec cette différence toutefois que nos conclusions, par cela seul qu'elles sont fournies par le calcul, sont plus complètes et plus précises, en ce qu'elles indiquent non seulement que les poutres articulées, en général, ont l'avantage sur les autres, mais aussi, parmi les divers systèmes de poutres articulées, quel est le plus avantageux.

Sur les équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité en coordonnées curvilignes.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques de M. Darboux, t. VI, p. 254.

Ce sont les équations de Lamé que nous donnons par une méthode plus simple et qui n'exige que des notions élémentaires sur les coordonnées curvilignes.

Depuis, nos études de Cinématique dans les espaces nous ont conduit à écrire ces équations d'une façon presque immédiate (*voir* plus loin, p. 38-39).

Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.

(Ce Mémoire a été présenté à l'Académie le 20 juin 1870 (p. 1323); son insertion au *Recueil des Savants étrangers* a été votée dans la séance du 10 juillet 1871 (p. 86), sur le Rapport de la Commission déjà chargée de nos précédents travaux.)

(Voir aussi Journal de M. Liouville, 1871, t. XVI, p 308 à 316, 369 à 372.)

On connaît les belles expériences de M. Tresca sur les déformations que subissent les corps solides ductiles lorsqu'ils sont soumis à de fortes pressions qui les déforment au delà de leur limite d'élasticité. Ces expériences ont conduit leur auteur à énoncer deux lois fondamentales, à savoir : 1° que pendant la déformation la matière ductile conserve en chaque point une densité invariable; 2° que l'action tangentielle maxima qui se développe en chaque point sur les divers éléments plans qui s'y croisent demeure également constante et égale au

coefficient de rupture par cisaillement, particulier à la matière sur laquelle on opère. M. Tresca, en faisant usage de considérations de Cinématique, a représenté par des formules très simples et très remarquables les principaux résultats de ses recherches. M. de Saint-Venant y a appliqué l'Analyse.

Dans une Note présentée à l'Académie le 7 mars 1870, il a traité le cas simple de la déformation des corps ductiles parallèlement à un plan donné.

Mais il fallait aussi mettre le problème en équation dans le cas général d'un corps doué d'un mouvement de déformation quelconque, et spécialement lorsque tout est symétrique autour d'un axe, ce qui est le cas des expériences de M. Tresca. Tel est l'objet du Mémoire dont il s'agit ici.

Voici comment M. de Saint-Venant, rapporteur de la Commission de l'Académie chargée de l'examen de ce travail, rend compte de la solution que nous avons donnée du double problème posé :

« M. Levy a fait avec bonheur ce double et complet établissement » d'équations dans le Mémoire dont nous avons à vous rendre compte.

» Il y avait, pour le cas le plus général, neuf équations à établir; » car il y a six composantes de pression et trois composantes de vi- » tesses inconnues; il fallait six équations dans le cas de symétrie au- » tour d'un axe.

» La difficulté principale pour le cas général était d'exprimer la » condition d'égalité à une constante K de la résistance au glissement » sur la face où le glissement est le plus fort en chaque point. La » détermination de cette force dépend en effet de la résolution de » l'équation du troisième degré dont les racines donnent les intensités » de ce que Cauchy a appelé les *trois pressions principales* qui sont nor- » males aux faces sur lesquelles elles agissent. M. Levy a surmonté » cette difficulté et a su se dispenser de résoudre l'équation du troi- » sième degré en question, en faisant un ingénieux usage de l'équa- » tion aux carrés des différences de ses racines. On sait en effet, etc. »

Puis, après avoir exposé les conséquences que nous avons tirées de ces équations, un essai d'intégration par approximation que nous avions alors tenté, le savant académicien rapporteur termine ainsi :

« Quels que soient les résultats à obtenir un jour de ces sortes de

» procédés ou d'expédients tendant à trouver des approximations à dé-
» faut d'une exactitude que refuse l'Analyse dans son état actuel, on
» peut dire que la branche nouvelle de Mécanique, pour laquelle l'un
» de nous a hasardé, sans le préconiser comme le meilleur, le terme
» d'*Hydrostéréo-dynamique*, a été menée à un état plus avancé par le
» Mémoire de M. Levy, dans lequel, pour le cas le plus général et
» aussi pour le cas important de symétrie semi-polaire, se trouve
» posé nettement et complètement en équation son problème, qui ne
» l'avait encore été que dans le cas fort restreint du mouvement par
» plans parallèles.

» Nous proposons donc à l'Académie d'approuver ce Mémoire et
» d'en ordonner l'insertion au *Recueil des Savants étrangers*.

» L'Académie adopte les conclusions de ce Rapport. »

Remarque. — Dans l'application que nous avions faite de nos équations générales au cas de symétrie, nous n'avions considéré que le cas où la plus grande et la plus petite des pressions principales sont dans le plan méridien. M. de Saint-Venant, sur une observation de M. Phillips et de M. Tresca, a, depuis, fait la remarque très juste qu'il peut se présenter un autre cas que nous n'avions pas examiné et qu'il a étudié dans une Note intitulée *Sur un complément à donner à une des équations présentées par M. Levy pour les mouvements plastiques symétriques autour d'un axe* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1872, p. 1023).

Note sur l'intégration des équations différentielles partielles relatives aux mouvements intérieurs des corps solides ductiles, lorsque ces mouvements ont lieu par plans parallèles.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 6 novembre 1871, p. 1098.

Dans une Note sur la Mécanique des corps ductiles, M. de Saint-Venant, faisant allusion à celle dont il s'agit ici, dit : « Je crois devoir
» appeler là-dessus toute l'attention et les recherches de M. Tresca,
» ainsi que celles de M. Levy, dont la remarquable Note du même

» jour (p. 1098) prouve, pour la seconde fois, qu'il peut faire progres-
» ser cette partie de la Mécanique. » (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1871, p. 1184.)

IV. — STATIQUE GRAPHIQUE.

La Statique graphique et ses applications aux constructions.

(Un Volume avec Atlas, Gauthier-Villars, 1874.)

Nous avons voulu, en publiant un premier Ouvrage de Statique graphique, éviter l'emploi des notions de Géométrie supérieure dont font usage la plupart des auteurs étrangers.

« L'Ouvrage de M. Maurice Levy, dit M. Darboux (*Bulletin des* » *Sciences mathématiques et astronomiques*, t. VIII), se distingue des » précédents par l'emploi exclusif des notions les plus élémentaires, » emploi qui ne peut être que favorable à la diffusion de la nouvelle » Statique. »

« En outre, il expose à un point de vue exclusivement géomé- » trique tout ce qui touche à la composition des forces et sans s'appuyer » en aucune manière sur les notions de Statique qui peuvent rendre » évidents certains théorèmes de Géométrie. »

Les procédés de la Statique graphique ne s'appliquaient qu'aux systèmes plans. Nous avons fait une première tentative pour les étendre à l'espace en construisant ce que nous avons appelé la *pyramide funiculaire*, comme l'analogue, en Statique à trois dimensions, du polygone funiculaire dans le plan.

Depuis, cet essai a été repris par deux auteurs étrangers : 1° M. le

professeur Carlo Saviotti, dans un Mémoire intitulé *Sopra un nuovo metodo generale di composizioni delle forze e sua estensione al calcolo delle travature reticolari* (Salviucci, editore, Roma), où il dit : « Fra i » diversi metodi per ridurre a due sole un sistema di forze applicate a » punti comunque posti nello spazio e fra di loro rigidamente connessi, » è noto quello denominato del *poligono e piramide funicolari* (*M. Levy*, » *Statique graphique*, ecc., 1874, p. 250; *Steiner*, *Die graphische Zusam-* » *mensetzung der Kräfte*, Wien, 1876). » 2° M. Steiner, qui a remplacé il y a quelques années M. Vinckler dans la chaire de Statique graphique de l'École polytechnique de Vienne, et qui en a fait usage dans le Mémoire: *Die graphische Zusammensetzung der Kräfte*, ci-dessus cité par M. Saviotti, et qui a paru deux années après notre *Statique*.

Les méthodes développées dans notre Ouvrage sont suivies dans l'enseignement de la Statique graphique de l'Université de Turin, comme M. le professeur Zucchetti, chargé de cet enseignement, veut bien le dire dans le passage suivant de ses Leçons :

« In questi due anni, dit-il, durante i quali ho avuto l'onore d'inse- » gnare la Statica grafica presso la R. Scuola d'applicazione per gl'In- » gegneri in Torino, per le condizioni degli studi fatti dai miei uditori, » ho creduto bene di seguire le traccie di Bauschinger e di Levy. Ed » ho redatto questo scritto, che mi sono deciso a pubblicare nella » speranza che esso possa tornare utile a coloro i quali desiderino pro- » cedere per le vie più facili allo studio della Statica grafica. » (*Statica grafica, sua teoria ed applicazioni*, par le professeur Ferdinando Zucchetti ; Torino, Augusto-Federico Negro, editore, p. 6.)

M. Favaro, de l'Université de Padoue, dans l'édition française de sa *Statique graphique*, dit : « C'est à M. Cremona qu'on doit véritablement » la théorie des figures réciproques dont M. Maurice Levy a fait un » si remarquable usage dans son excellent Traité. »

Dans l'édition italienne, il cite notre Ouvrage à ses principaux Chapitres : pages 227, 247, 399, 417, 431, 438, 447, 450, 514, 545, 575.

M. le professeur Jay du Bois, dans sa *Graphical Static*, dit : « Which the method has found in France and the attention which it has then excited, is sufficiently indicated by the work of Levy (*La Statique graphique et ses applications*, 1874) which contains *a very clear and elegant*

presentation of the principles [1], though the applications an of the simplest character [2]. » (*The elements of graphical Static and their application*, etc., by JAY DU BOIS, professor of civil and mechanical engineering, leigh University Penna; New-York, John Wiley, 1877, p. IV.)

Depuis la publication de notre Ouvrage, l'enseignement de la Statique graphique paraît aussi avoir été introduit en France, à l'École des Ponts et Chaussées, autant vraisemblablement que le permettent le programme de l'enseignement et le nombre de leçons qu'il est possible d'y consacrer.

C'est dans ces mêmes limites que nous l'avons nous-même introduite dans notre enseignement à l'École Centrale.

Mais c'est à l'École d'application de Fontainebleau qu'il y a été donné le plus d'impulsion, dans les excellentes leçons de M. le commandant Chéry (Résistance des matériaux et constructions en bois et en fer), où la méthode que nous avons suivie est exposée dans tous ses détails, parfois simplifiée dans certaines applications, et notre Ouvrage cité constamment, pages 19, 26, 29, etc., de même que les figures de plusieurs de nos planches sont reproduites.

---

(1) Le passage souligné l'est par M. Maurice Levy.

(2) Nous avons tenu, dans ce premier Volume, à ne donner que les applications de la Statique *rigoureuse*, sauf à traiter, dans de nouvelles publications, les questions qui exigent l'emploi des principes de la Résistance des matériaux.

Cette distinction, que paraissent nous reprocher MM. les professeurs Culmann et J. du Bois, nous semble d'autant mieux justifiée que, dans le Mémoire qui forme l'objet de la Note II, placée à la fin de l'Ouvrage, nous démontrons que les seules constructions susceptibles d'être constituées en systèmes d'égale résistance sont aussi celles dont la Statique pure et, par suite, la Statique graphique permettent de calculer les dimensions sans recourir aux formules moins certaines de la Résistance (*voir* notre *Statique graphique*, Note II, p. 236; et la présente Notice, p. 24).

V. — THÉORIE ANALYTIQUE ET THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

Sur le problème du refroidissement des corps solides, en ayant égard à la chaleur dégagée par la contraction.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 10 juillet 1876.

Ce problème, qui a été mis en équation pour la première fois par Duhamel, comporte quatre fonctions inconnues, savoir :

1° Les composantes u, v, w du déplacement d'un point du corps solide;

2° Sa température V.

Ces fonctions des coordonnées x, y, z du point considéré et du temps t doivent satisfaire :

(a) A quatre équations à dérivées partielles simultanées du second ordre en tous les points du corps;

(b) A quatre conditions à la surface (trois relatives aux pressions et une relative à la température);

(c) A l'instant $t = 0$, la température est donnée en chaque point du corps.

Pour résoudre ce problème, on est généralement amené :

1° A chercher une solution simple de la forme

$$u = u_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}, \quad v = v_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t},$$
$$w = w_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}, \quad V = V_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t},$$

a étant une constante dépendant de la densité, de la chaleur spécifique et du coefficient de conductibilité du corps, et λ une constante indéterminée, dont on disposera ainsi que des quatre fonctions u_λ, v_λ, w_λ, V_λ des coordonnées x, y, z, de façon à satisfaire aux conditions (a) et (b);

2° A faire la somme de toutes les solutions de cette forme, relatives à toutes les valeurs possibles de λ;

3° A déterminer les constantes arbitraires qui entrent dans cette somme, de manière à satisfaire à la condition (c).

Quand on suit cette marche pour résoudre le problème du mouvement de la température, considéré à la manière de Fourier, c'est-à-dire en faisant abstraction des déplacements élastiques qui en résultent, on n'a que la seule inconnue V, et l'on démontre alors cette formule classique

$$\iiint V_\lambda V_\mu \, dx\, dy\, dz = 0, \tag{1}$$

où V_λ et V_μ se rapportent à deux valeurs différentes λ et μ de la constante λ, l'intégration triple étant étendue à tout le volume occupé par le corps. Cette formule permet, dans beaucoup de cas, de résoudre la dernière partie du problème, c'est-à-dire de déterminer les constantes arbitraires par la condition relative à l'instant initial.

Nous démontrons que dans le problème actuel, malgré le *mélange* des quatre fonctions inconnues, les fonctions V_λ et V_μ satisfont à l'identité suivante,

$$\iiint V_\lambda \left(\frac{d^2 V_\mu}{dx^2} + \frac{d^2 V_\mu}{dy^2} + \frac{d^2 V_\mu}{dz^2} \right) dx\, dy\, dz = 0,$$

qui permettra de déterminer les constantes arbitraires dans le problème complexe dont il s'agit ici, toutes les fois que la formule (1) le permet dans le problème de Fourier.

Sur les deux principes de la Théorie mécanique de la chaleur.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 5 mars 1877.

Applications d'un théorème comprenant les deux principes de la Théorie mécanique de la chaleur.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 12 mars 1877.

Dans la première de ces Communications, nous démontrons que les deux principes de la Théorie mécanique de la chaleur se trouvent com-

plètement exprimés l'un et l'autre par ce fait géométrique unique : pour un corps quelconque, les lignes adiabatiques et les lignes isothermes sont susceptibles de diviser le plan en parallélogrammes infiniment petits équivalents (ou, ce qui revient au même, en quadrilatères curvilignes finis équivalents).

Par suite, tous les développements des deux principes de la Thermodynamique se présentent comme des conséquences de ce théorème de Géométrie et se réduisent à l'étude, sur le plan, d'un double réseau de lignes, caractérisé par la propriété indiquée.

Notamment, les deux principes étant contenus dans un seul théorème de Géométrie, ils le sont aussi dans une formule unique. Cette formule change de forme suivant la nature des variables qu'on choisit pour définir un point du plan ; mais, quelles que soient ces variables, notre théorème permet d'écrire immédiatement la formule correspondante et unique par laquelle il est possible de résumer actuellement la Thermodynamique.

Dans la seconde Communication, nous écrivons cette formule de toutes pièces, avec les variables généralement usitées ; nous retrouvons les fonctions caractéristiques de M. Massieu, et nous indiquons à quelle circonstance est due leur existence.

Nous résolvons enfin cette question, qui, au point de vue physique, est assez importante pour avoir appelé aussi l'attention de M. Phillips : Étant donné un nouveau corps, quels sont, dans l'état actuel de la Science, les éléments strictement nécessaires et suffisants à emprunter à l'observation pour pouvoir l'étudier au point de vue thermodynamique ?

Nous montrons qu'il faut et il suffit de connaître : 1° la relation qui lie le volume, la pression et la température (v, p, T) ; 2° la chaleur spécifique sous pression constante, observée *sous une seule pression* arbitrairement choisie, par exemple sous la pression atmosphérique (ou la chaleur spécifique à volume constant, *sous un volume particulier*).

M. Phillips, par une voie différente de la nôtre, est arrivé à ce même résultat, qu'il a même énoncé sous une forme un peu plus générale, en disant qu'il faut et il suffit de connaître : 1° la relation entre v, p, T ; 2° ce qu'on pourrait appeler la chaleur spécifique du corps répondant à une transformation de ce corps opérée suivant une

ligne arbitrairement tracée dans le plan (de même qu'on appelle chaleur spécifique d'une vapeur saturée sèche, la chaleur spécifique répondant à la transformation qui a lieu suivant la ligne particulière pour laquelle la vapeur reste à la fois saturée et sèche).

Sur une loi relative à la dilatation des corps.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1877, 2e semestre, p. 449.

Réponse à diverses Communications relatives à la Note ci-dessus.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1877, p. 488, 554, 647, 676, 826.

Dans la première de ces Communications, en partant de l'hypothèse que l'action mutuelle de deux molécules d'un corps est dirigée suivant la droite qui les joint et fonction de leur distance, nous avons été conduit à cette loi, que, pour tous les corps, le volume spécifique varie linéairement avec la température.

Dans les Communications suivantes, nous répondons à diverses objections qui nous ont été adressées à ce sujet.

Ce qui a provoqué ces objections, c'est que notre première Communication semblait devoir donner à cette loi une valeur rigoureuse, tandis qu'elle ne peut être considérée que comme approchée. Notre démonstration suppose, en effet, que, lorsque l'état d'un corps se modifie infiniment peu, il y a égalité entre le travail moléculaire dû aux changements qui se produisent dans les positions *moyennes* de ses différents points et la valeur *moyenne* du travail dû aux déplacements véritables des molécules, eu égard au mouvement stationnaire qu'on leur attribue pour expliquer le phénomène de la chaleur.

Or, ces deux quantités ne sont pas rigoureusement égales; leur différence est d'autant plus faible que les orbites des mouvements stationnaires sont elles-mêmes plus faibles relativement aux distances moyennes entre les molécules. Or :

1° Dans les corps solides, il est vraisemblable que les excursions des molécules sont extrêmement faibles par rapport à leurs distances mutuelles; que, par suite, la loi est très approchée pour ces corps.

2° Pour les liquides il doit en être de même.

3° Pour les gaz parfaits, la loi est rigoureusement vraie.

Mais restent les gaz imparfaits et les vapeurs, pour lesquels on conçoit qu'elle puisse donner des écarts plus considérables, parce que là les orbites des molécules peuvent avoir des dimensions comparables à leurs distances moyennes.

M. Phillips, dans une de ses importantes Communications auxquelles nous avons fait allusion plus haut, avait déjà fait cette remarque que la loi est vraie pour les corps pour lesquels la chaleur spécifique sous volume constant est constante ou, plus généralement, ne dépend que de la température.

M. Sarrau, dans une Note insérée au *Journal de Physique*, l'a très ingénieusement rattachée au beau et fécond théorème de M. Yvon Villarceau.

VI. — CINÉMATIQUE.

Remarque sur la Cinématique dans les espaces.

Au lieu de placer à la base de la Géométrie, les idées sur la courbure des espaces émises par Riemann, développées analytiquement par Christoffel, Lipschitz, Beltrami, Schläfli, Sophus Lie, et tout récemment par M. Darboux, dans son beau Mémoire *Sur les coordonnées curvilignes* publié aux *Annales de l'École Normale supérieure*, on peut aussi, comme il ressort des travaux de MM. Beltrami et Schläfli, la fonder sur ce double postulatum moins abstrait, à savoir : 1° que notre espace est tel, qu'il est possible d'y déplacer un système invariable, à partir de l'une quelconque de ses positions et dans une direction quelconque; 2° qu'il est infini en tous sens.

C'est dans cet ordre d'idées, qui rattache plus directement les premiers fondements de la Géométrie à la Cinématique et, comme on va le voir aussi, à la Dynamique, que sont conçues les Communications qui suivent.

On peut trouver les premiers germes de ces idées nouvelles dans plusieurs des beaux travaux de M. Bertrand sur l'intégration des problèmes de la Dynamique.

Ainsi, dire avec M. Bertrand qu'un problème de Dynamique à n variables indépendantes admet une intégrale linéaire par rapport aux composantes des vitesses des points mobiles, c'est dire que l'espace dont le carré de l'élément linéaire serait le produit du carré de l'élément de temps par l'expression de la force vive du problème de Dynamique considéré est tel, qu'on y peut déplacer une figure invariable dans une direction particulière.

Sophus Lie a démontré tout récemment (Christiania, *Universitäts Program*, 1879, 1er semestre) que les surfaces dont la ligne géodésique a été trouvée, pour la première fois, par M. Liouville [1] sont caractérisées géométriquement, parce qu'on peut les transformer point par point de façon qu'à une ligne géodésique corresponde une ligne géodésique (M. Moutard a également trouvé cette propriété, qu'il n'a pas publiée, mais qu'il nous a énoncée dans une conversation particulière il y a quelque temps déjà).

On peut énoncer ce théorème ainsi (et sous cette forme il est probable que, sauf une discussion plus ou moins minutieuse des cas particuliers, il s'appliquera à des espaces d'un nombre quelconque de dimensions et, par suite, à des problèmes de Dynamique à plus de deux variables indépendantes) :

La surface la plus générale pour laquelle le problème de la ligne géodésique considéré comme problème de Mécanique admet, suivant l'expression de M. J. Bertrand, une intégrale *algébrique et du second degré* par rapport aux composantes de la vitesse du mobile, est celle sur laquelle il est possible de déplacer une figure de forme variable de façon que ses lignes géodésiques restent géodésiques (mais cette fois avec altération dans les longueurs).

Lorsqu'on se place au point de vue purement géométrique, c'est-à-dire lorsqu'on invoque la notion de courbure des espaces, il ressort des

(1) Celles dont le ds^2 est de la forme

$$ds^2 = [f(\alpha) - \varphi(\beta)](d\alpha^2 + d\beta^2).$$

travaux mentionnés plus haut que les équations en H_i de Lamé, équations qui forment le résumé complet de ses belles leçons sur les coordonnées curvilignes, expriment la nullité de la courbure de l'espace, et on les retrouve de toutes pièces en partant de cette idée.

Mais on doit naturellement les retrouver aussi, par des procédés cinématiques, en exprimant la possibilité de déplacer dans l'espace une figure de forme invariable [1].

Pour cela, il est d'abord nécessaire d'avoir une formule générale qui exprime la dilatation linéaire dans un espace quelconque. C'est l'objet de la première des Communications dont il est rendu compte dans ce qui suit.

Sur la cinématique des figures continues sur les surfaces courbes et, en général, dans les variétés planes ou courbes.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 1er avril 1878.

Cette Communication contient une formule unique résumant la théorie de la vitesse des figures de forme variable ou invariable dans un espace quelconque.

Soient $x_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ les n variables qui définissent la position d'un point de l'espace ; soit

$$ds^2 = \sum_{ij} a_{ij} dx_i dx_j,$$

où les coefficients $a_{ij} = a_{ji}$ sont des fonctions quelconques des n variables, l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins d'une figure mobile considérée dans cet espace.

Soient δx_i les accroissements que prennent ces variables par suite du

(1) Il paraît résulter enfin d'un récent Mémoire (dont il sera parlé ci-après) de M. Lie sur les lignes géodésiques des surfaces qu'on doit pouvoir rattacher aussi toutes ces questions à ce que M. Lie a appelé les *transformations infinitésimales des équations différentielles*.

On conçoit, en effet, qu'il doive exister des rapports intimes entre les déplacements infiniment petits *possibles* dans une variété donnée et les transformations infinitésimales de Lie, dont sont *susceptibles* les équations différentielles qui représentent la ligne géodésique dans cette variété.

déplacement de la figure pendant l'intervalle de temps δt, et appelons $\lambda = \frac{\delta ds}{ds}$ la dilatation que subit l'élément linéaire ds pendant cet intervalle de temps.

Nous trouvons pour λ l'expression suivante :

$$\lambda = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathrm{L}_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds},$$

où

$$\mathrm{L}_{ij} = \sum_{k} \left(\frac{da_{ij}}{dx_k} \delta x_k + a_{ik} \frac{d\delta x_k}{dx_j} + a_{jk} \frac{d\delta x_k}{dx_i} \right).$$

Applications. — 1° Si l'on prend un espace euclidien et des coordonnées rectangulaires et rectilignes, on aura

$$a_{ij} = 0, \qquad a_{ii} = 1,$$

$$\frac{1}{2} \mathrm{L}_{ii} = \frac{d\delta x_i}{dx_i}, \quad \mathrm{L}_{ij} = \frac{d\delta x_i}{dx_j} + \frac{d\delta x_j}{dx_i}.$$

On reconnaît là de suite, pour l'espace à trois dimensions, les trois dilatations et les trois glissements qui jouent un rôle si important dans la théorie mathématique de l'élasticité.

2° Si l'on écrit que $\lambda = 0$, c'est-à-dire que les L_{ij} et L_{ii} sont tous nuls, on a immédiatement les valeurs des δx_i qui conviennent au mouvement le plus général possible d'un système invariable, c'est-à-dire toute la théorie classique de la vitesse dans le mouvement de ces systèmes, et par suite, par différentiation, la théorie des accélérations des différents ordres.

3° Si l'on fait $k = 3$, $a_{ij} = 0$, $a_{ii} = \mathrm{H}_i^2 = \frac{1}{h_i^2}$, on a

$$\frac{h_i^2}{2} \mathrm{L}_{ii} = \frac{d\delta x_i}{dx_i} - \sum_{k=1}^{k=3} \frac{1}{h_i} \frac{dh_i}{dx_k} \delta x_k,$$

$$h_i h_j \mathrm{L}_{ij} = \frac{h_j}{h_i} \frac{d\delta x_i}{dx_j} + \frac{h_i}{h_j} \frac{d\delta x_j}{dx_i}.$$

On reconnaît là, aux notations près et trouvées d'une façon immé-

diate, les formules données, pour la première fois, par Lamé pour les trois dilatations et les trois glissements exprimés en coordonnées curvilignes et qui conduisent aux équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité en coordonnées orthogonales générales.

4° Si l'on écrit de nouveau que les L_{ii} et L_{ij}, pris sous cette nouvelle forme, sont nuls, c'est-à-dire que l'espace est tel qu'on y peut déplacer un système invariable, ce qui n'a pas été supposé pour établir ces formules, on a *six* équations entre les *trois* fonctions indéterminées δx_i, et, en exprimant que ces six équations admettent une solution commune avec six constantes arbitraires, on retrouvera les équations en H_i qui conviennent à un espace à courbure constante.

Sur les conditions que doit remplir un espace pour qu'on y puisse déplacer un système invariable à partir de l'une quelconque de ses positions dans une ou plusieurs directions.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 8 avril 1878

Nous démontrons que, pour qu'un espace soit tel qu'on y puisse déplacer un système invariable dans *une* direction, il faut et il suffit que, moyennant un choix convenable des variables, on puisse faire en sorte que les coefficients qui entrent dans l'expression du carré de l'élément linéaire perdent une des n variables qui définissent la position d'un point dans cet espace.

Sur les conditions (tirées de la Cinématique) pour qu'une surface donnée soit applicable sur une surface de révolution.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 15 avril 1878.

Bour et M. Massieu ont démontré cette proposition : que les surfaces applicables sur les surfaces de révolution sont entièrement caractérisées par ce fait que le problème de la recherche de leurs lignes géodésiques, considéré comme un problème de Mécanique, admet une intégrale linéaire par rapport aux composantes de la vitesse du mobile.

Bour a fait la remarque que cette proposition permet de résoudre le problème suivant :

Étant donnée une surface, reconnaître, par des opérations purement différentielles, si elle est ou non applicable sur une surface de révolution.

Comme il s'agit d'un problème purement géométrique, nous nous sommes proposé de le résoudre sans recourir aux équations générales de la Dynamique.

En exprimant directement ce fait cinématique, qu'une surface applicable sur une surface de révolution est nécessairement telle qu'on y peut déplacer une figure sans en altérer les longueurs, à partir de l'une quelconque de ses positions, dans une certaine direction et appliquant à ce déplacement la formule générale de la Communication *sur la cinématique des figures continues*, etc., susmentionnée, nous arrivons très directement au résultat. Nos équations de condition se présentent sous une forme différente de celles trouvées par Bour ; mais nous montrons l'équivalence des deux systèmes d'équations.

Sur la surface la plus générale sur laquelle une figure peut se déplacer en restant semblable à elle-même dans ses parties infinitésimales.

Si l'on applique notre formule générale à un déplacement dans lequel la dilatation de chaque élément linéaire est, non plus nulle, comme cela a lieu pour une figure invariable, mais constante, on trouvera la surface la plus générale sur laquelle il est possible de déplacer une figure de façon qu'elle reste semblable à elle-même dans ses éléments infinitésimaux.

On trouve ainsi sans difficulté ce théorème :

Pour qu'une surface soit telle qu'une figure de forme variable puisse s'y déplacer à partir de l'une quelconque de ses positions, en restant constamment semblable à elle-même dans ses éléments infinitésimaux, il faut et il suffit que le carré de l'élément linéaire de cette surface puisse, moyennant l'emploi de variables convenables, être exprimé sous forme homogène par rapport à ces variables.

Dès lors, on peut résoudre ce problème :

Étant donnée une surface, reconnaître, par des opérations purement différentielles, si, par un changement convenable des variables, il est possible de mettre l'expression de son élément linéaire sous forme homogène.

Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 2e semestre 1878, p. 788.

Ce sont ces considérations de Cinématique qui nous ont amené, en 1878, à étudier le développement des surfaces dont il s'agit.

On sait que, pour les surfaces de révolution, Bour, généralisant un théorème de M. Bonnet, a montré que, étant donnée une surface de révolution, il existe une série de moulures hélicoïdales, renfermant deux constantes arbitraires, toutes applicables sur la surface donnée.

Nous démontrons un théorème analogue sur les surfaces dont il est question ici. Nous définissons d'abord une surface que nous appelons une *pseudo-moulure logarithmique* et qui est engendrée ainsi qu'il suit.

Concevons que, dans un plan, on trace une droite fixe OZ et une courbe arbitraire. Imaginons que le plan tourne autour de l'axe OZ pendant que la courbe se déforme en restant constamment homothétique à elle-même relativement au point O, ses dimensions homologues croissant en progression géométrique pendant que les angles dont tourne le plan croissent en progression arithmétique.

C'est la surface ainsi engendrée que nous appelons une *pseudo-moulure.*

Et nous démontrons ce théorème :

Étant donnée une surface sur laquelle une figure peut être déplacée en restant semblable à elle-même dans ses parties infinitésimales, ou, ce qui revient au même, une surface dont l'élément linéaire est une fonction homogène de deux variables, il existe une série de pseudo-moulures, avec deux constantes arbitraires, toutes applicables sur elle.

Depuis que cette Note est publiée, M. Sophus Lie a publié un Mémoire très important, intitulé *Classification der Flächen, nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven* (Christiania, 1879, *Universitäts-Programm*), dans lequel il a retrouvé ce même théorème, dont il veut bien d'ailleurs nous attribuer la priorité. Les surfaces que nous appelons des *pseudo-moulures logarithmiques*, M. Lie les appelle des *surfaces spirales* (*Spiral-Fläche*), nom plus simple et meilleur. Il dit, en ce qui nous concerne : « Comme, pendant l'impression de notre Mémoire, nous avons reconnu que M. M. Levy avait trouvé le théorème » dont il s'agit, nous pouvons nous en référer à sa Note, laquelle contient d'ailleurs un autre théorème élégant. » [« Da indess Herr » M. Levy (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, » 18 November 1878), wie ich während des Druckes dieser Abhandlung bermerke, soeben diesen letzten Satz bewiesen hat, kann ich » mich darauf beschräncken, auf die citirte Note, die ausserdem einen » anderen eleganten Satz enthält, zu verweisen. » (Sophus Lie, Mémoire susmentionné, p. 10.)]

Sur la composition des accélérations d'ordre quelconque.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 27 avril 1878.

Dans cette Communication, nous donnons un théorème qui permet de faire la composition des accélérations d'ordre quelconque dans le mouvement d'un point, non seulement lorsque son mouvement relatif est, suivant l'usage, rapporté à un système de comparaison restant invariable de forme, mais plus généralement lorsque le système de comparaison se déplace en changeant de forme, pourvu qu'il reste constamment *homographique* à lui-même.

Dans le cas particulier où le système de comparaison est de forme invariable, notre formule coïncide :

1° Avec celle donnée, pour la première fois, par M. Resal, dans sa *Cinématique pure*, pour la suraccélération (ou accélération du second ordre) ;

2° Avec une formule donnée, parait-il, pour les accélérations d'ordre quelconque, dans un Mémoire publié en russe par M. Somoff. (Nous

n'avons pas pu nous procurer ce Mémoire, signalé par M. Liguine aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 28 octobre 1878, où M. Liguine nous reconnaît, du reste, la priorité de la solution dans le cas général d'un système de comparaison de forme variable.)

Enfin, dans une Communication du 29 juillet, M. Laisant a traité la question par les méthodes du Calcul des quaternions; mais, dans une Communication du 2 septembre 1878, il déclare loyalement qu'il ignorait notre Communication quand il a fait la sienne.

M. de Saint-Germain a bien voulu également appeler l'attention sur notre Communication.

VII. — GÉOMÉTRIE.

Sur une transformation des coordonnées curvilignes orthogonales et sur les coordonnées curvilignes comprenant une famille quelconque de surfaces du deuxième ordre.

(Thèse pour le doctorat ès sciences, soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, 1867.)

Voici un extrait du Rapport fait sur cette Thèse par M. Chasles, président du jury d'examen : « Ce sujet se rapporte à une théorie qui a » été l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres, et cependant le travail de M. Levy renferme plusieurs propositions importantes et entièrement neuves. Parmi ces propositions, on en » remarque deux surtout qui sont très dignes de fixer l'attention des » géomètres. La première exprime, d'une manière très élégante, la » condition que doit remplir une famille de surfaces pour que ces surfaces puissent faire partie d'un système triple orthogonal. On savait » que cette condition est exprimée par une équation aux dérivées » partielles du troisième ordre ; mais cette équation est si compliquée, » qu'on n'avait jamais pu en rien conclure.

» La deuxième proposition est relative aux surfaces du deuxième » ordre; elle permet de former tous les système triples orthogonaux » composés de surfaces de cet ordre. Toute la deuxième Partie du tra- » vail de M. Levy est coosacrée au développement des nombreux co- » rollaires de ce théorème fondamental; elle constitue un chapitre » important de la théorie des surfaces. »

Mémoire sur les coordonnées curvilignes.

Journal de l'École Polytechnique, t. XXVI.
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques de M. Darboux, t. I, p. 271.

M. Cayley, dans les Communications qu'il a adressées sur cette matière à l'Académie des Sciences de Paris en 1872, a bien voulu débuter ainsi :

« Soit $\rho = f(x, y, z)$ l'équation d'une famille de surfaces qui fait » partie d'un système orthogonal. On sait que ρ satisfait à une équation » à différences partielles du troisième ordre, et, en suivant la route » tracée par M. Levy dans son excellent *Mémoire sur les coordonnées* » *curvilignes orthogonales* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXVI, » p. 157-200; 1870), je suis parvenu à trouver cette équation. » (Cayley, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1872.)

M. Weingarten, dans un Mémoire récemment publié au *Journal für Mathematik*, de M. Borchardt, dit :

« Ce n'est qu'après que Levy eut, dans un remarquable Mémoire » (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXVI, 1870), fait connaître, » sous forme géométrique, la condition nécessaire et suffisante pour » l'existence d'un système de pareilles surfaces, que Cayley réussit à » trouver l'équation différentielle du troisième ordre correspondante » sous une forme très compliquée, que M. Darboux, par lequel cette » théorie a été beaucoup enrichie, a ensuite simplifiée [1]. » Weingar-

[1] « Erst nachdem Levy in einer ausgezeichneten Abhandlung (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXVI, 1870) eine geometrische Bedingung, die für die Existenz dieses Flächensystems hinreichend und nothwendig ist, kennen gelehrt hatte, gelang es Cayley (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXIV) die erwähnte Differentialgleichung dritter Ordnung in einer sehr complicirten Form aufzustellen, etc. »

TEN, *Ueber die Bedingung unter welcher eine Flächenfamilie einem orthogalen Flächensystem angehört* (*Journal für Mathematik*, t. LXXXIII, Cahier 1)]

M. Chasles signale notre Mémoire dans l'historique des progrès de la Géométrie.

Ce travail comprend les principaux résultats de notre Thèse, avec divers développements analytiques en plus. Nous y donnons, sous forme explicite, l'équation la plus générale des familles de surfaces du second ordre susceptibles de faire partie d'un système orthogonal. Cela constitue une intégrale *avec une fonction arbitraire* de l'équation à différences partielles du troisième ordre en ρ dont parle M. Cayley, équation dont l'existence a été, comme on sait, démontrée pour la première fois par M. Bonnet, dans son célèbre Mémoire sur ce sujet.

En outre, nous mettons la condition géométrique qu'exprime cette équation, dans le cas général des surfaces quelconques, sous une forme simple à laquelle les travaux de M. Cayley paraissent donner un intérêt particulier, et qui se trouve rapportée, comme la plupart de nos autres recherches, dans le grand Mémoire que M. Darboux vient de publier aux *Annales de l'École Normale supérieure*.

« Si l'on suppose, dit M. Darboux, que l'on ait pris pour axes des » x et des y les tangentes aux lignes de courbure en un point, on re- » trouve l'équation $\frac{d^2 H}{dx\,dy} = 0$, donnée par M. Maurice Levy; mais cet » habile géomètre l'a démontrée directement sans donner la for- » mule (56), écrite dans un système de variables quelconques. » (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1879, p. 121.)

Sur une réduction de la forme donnée par Cayley à l'équation à dérivées partielles du troisième ordre qui régit les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 15 décembre 1873, p. 1435.
DARBOUX, Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, p. 121, 122, 123).

Cayley a montré que cette équation, qui régit le paramètre d'une famille de surfaces $\rho = f(x, y, z)$, est linéaire par rapport aux six déri-

vées partielles du second ordre de la quantité

$$H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2}}.$$

Par un changement de variables consistant simplement à prendre z comme fonction inconnue, en mettant l'équation de la famille de surfaces sous la forme $z = \varphi(x, y)$, nous faisons disparaître trois des six termes de l'équation de l'illustre géomètre.

M. Darboux a bien voulu reproduire notre équation à l'endroit cité de son Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes.

M. Schläfli s'est également occupé récemment de cette question; nous ne croyons pas que l'équation dont il s'agit ait revêtu, dans les travaux de ces divers géomètres, une forme aussi réduite que celle qui fait l'objet de la présente Note.

Sur une propriété générale des focales des surfaces.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXXIV, p. 76.

La propriété que nous établissons est celle-ci : *Une surface quelconque et sa focale se coupent à angle droit en tous leurs points d'intersection*, en définissant, comme on le fait habituellement, la focale d'une surface, la ligne double de la développable circonscrite à cette surface et au cercle imaginair ede l'infini.

Nous avons établi, dans notre Thèse de Géométrie, qu'une condition nécessaire pour que des surfaces puissent faire partie d'un système orthogonal consiste en ce que ces surfaces soient toutes coupées à angle droit par la ligne lieu de leurs ombilics. Le théorème ci-dessus montre que cette condition est remplie d'elle-même par toute famille de surfaces homofocales.

VIII. — MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET ANALYSE.

Cinq Communications sur le problème des lignes géodésiques considéré comme problème de Mécanique.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences des 12, 19 et 26 novembre, 3 et 17 décembre 1877.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. IX, p. 266, 267, 268.

Bour [1], en développant très habilement, après M. Massieu, une pensée due à M. Bertrand [2], a indiqué le moyen de reconnaître, toutes les fois que le carré de l'élément linéaire d'une surface est mis sous la forme

$$ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy,$$

à quelle condition le problème du mouvement d'un point matériel sur cette surface, la fonction des forces étant supposée nulle, admet une intégrale algébrique par rapport aux composantes de la vitesse du mobile.

Cette condition consiste en ce que la fonction λ ou une fonction auxiliaire L, introduite par Bour et définie par la relation $\lambda = \frac{d^2 L}{dx\, dy}$, doit satisfaire à une équation à dérivées partielles d'un ordre d'autant plus élevé que le degré de l'intégrale algébrique supposée, est lui-même plus élevé.

On reconnaît ainsi que les seules surfaces pour lesquelles le problème des lignes géodésiques admet une intégrale algébrique du premier degré sont celles applicables sur une surface de révolution, et que les seules pour lesquelles il admet une intégrale algébrique du second degré sont les surfaces qu'avait déjà rencontrées M. Liouville dans

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier, p. 176.
(2) *Journal de Liouville*, 1857.

ses beaux Mémoires sur quelques cas particuliers où les équations de la Dynamique peuvent être intégrées.

Dès qu'on arrive aux intégrales algébriques d'un degré supérieur au second, les équations aux dérivées partielles en L sont du troisième ordre ou d'ordres plus élevés.

Ces équations, Bour n'a fait aucune tentative pour les intégrer, et, en effet, leur intégration complète paraît devoir être bien au-dessus des moyens actuels de l'Analyse; mais elles présentent une circonstance extrêmement digne d'attention : c'est que toutes, quelque élevé qu'en soit l'ordre, admettent des intégrales intermédiaires *particulières* de tous les ordres inférieurs au leur propre, et par ces mots *intégrales particulières* nous entendons, non pas de simples combinaisons intégrables comme celles dont, par une très belle extension des méthodes de Monge et d'Ampère, M. Darboux a appris à reconnaître l'existence, mais des équations à dérivées partielles dont la solution générale appartient *tout entière* et dont, par suite, toute solution particulière appartient aussi à l'équation d'ordre plus élevé qui leur a donné naissance, tandis que les combinaisons intégrables (autres que celles du premier ordre considérées par Ampère) n'ont en commun avec les équations à dérivées partielles dont elles proviennent, qu'*une* de leurs intégrales particulières.

Dans les deux premières Communications, nous vérifions le fait sur les équations à dérivées partielles du troisième et du quatrième ordre en L exprimant que le problème des lignes géodésiques admet une intégrale algébrique du troisième et du quatrième degré. Nous trouvons l'équation à dérivées partielles du second ordre servant d'intégrale intermédiaire à la première; elle est

$$4(r+t^2)(t+r^2) = (rt-s^2)^2,$$

et les équations à dérivées partielles du troisième et du second ordre servant d'intégrales intermédiaires à la seconde. L'équation du second ordre est

$$27(r^2-t^2)^2 = 16\,s^2(rt-s^2)^2.$$

Nous démontrons ensuite que ces intégrales intermédiaires doivent exister non seulement pour l'équation en L exprimant que le problème

des lignes géodésiques admet une intégrale algébrique et entière par rapport aux composantes de la vitesse du point mobile, quel qu'en soit le degré, mais même pour celle qui exprime que ce problème admet une intégrale *fraction rationnelle* par rapport aux composantes de la vitesse.

Nous trouvons que le cas où le numérateur et le dénominateur de la fraction sont du même degré présente une circonstance remarquable. Dans ce cas rentre un problème déjà traité par M. Bonnet : celui où les deux termes de la fraction sont linéaires.

Enfin ces considérations conduisent à une classification des surfaces d'après la nature des intégrales de leurs lignes géodésiques.

Dans le *Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik* est donné un compte rendu complet et très précis de ces diverses recherches.

Sur les conditions pour qu'une forme quadratique de n différentielles (ou l'expression de la force vive d'un problème de Mécanique) puisse être transformée de façon que ses coefficients perdent une partie ou la totalité des variables qu'ils renferment.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (1877).

On montre que cette condition est pareille à celle qui est nécessaire pour qu'on puisse déplacer une figure invariable dans un certain espace. C'est pour cela, par exemple, que le ds^2 d'une surface de révolution peut être mis sous une forme telle que les coefficients ne contiennent qu'une des deux variables qui définissent la position d'un point sur la surface.

Sur la théorie des équations à dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 4 novembre 1872.

Les équations à dérivées partielles du premier ordre se distinguent de toutes les autres par ce que les arbitraires qui entrent dans leurs équations intégrales se présentent sous des formes qu'il est possible de définir, de classer, et par suite d'étudier d'ensemble.

Les arbitraires que fait naître l'intégration des équations d'ordre supérieur revêtent, au contraire, des formes tellement diverses, que, dans l'état actuel de la Science, il est impossible d'en faire une classification générale.

C'est là ce qui explique qu'on ait pu constituer une méthode générale d'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, tandis qu'on concevrait difficilement qu'il pût exister une telle méthode pour l'intégration des équations d'ordre supérieur.

Là, en effet, l'inconstance même de la forme des intégrales doit entraîner celle de la marche à suivre pour les découvrir. Aussi, toutes les recherches faites jusqu'ici sur l'intégration de ces sortes d'équations supposent essentiellement que l'on ne s'adressera qu'à certaines formes d'intégrales données d'avance.

Les recherches d'Ampère elles-mêmes, si générales qu'elles soient, ne font pas exception à cette règle.

Or, parmi les formes d'intégrales qui, dans l'état actuel de l'Analyse, paraissent pouvoir fournir matière à une étude d'ensemble, les plus générales et les plus dignes d'attention nous semblent être celles qui sont définies par la seule condition de pouvoir être représentées par un ou plusieurs systèmes d'équations à différences ordinaires. Ces intégrales seraient d'autant plus précieuses à connaître qu'on pourrait espérer les étudier sur les équations différentielles même qui leur serviraient de définition.

Jusqu'ici, on s'est surtout occupé des intégrales qu'Ampère appelle de *première classe* et qui sont caractérisées par ce que *toutes* leurs arbitraires sont en dehors de signes d'intégration *partielle*. Celles auxquelles nous sommes conduit ici, dont on rencontre d'ailleurs nombre de cas particuliers dans l'intégration de l'équation de Laplace, appartiennent à la seconde classe d'Ampère; certaines de leurs arbitraires peuvent être engagées sous des signes d'intégration partielle.

On reconnaît aisément que ces intégrales jouissent nécessairement de la propriété d'appartenir en commun à l'équation différentielle partielle du second ordre proposée et à une équation à différences partielles d'ordre plus ou moins élevé $V = 0$, renfermant elle-même une fonction arbitraire. Or, M. Darboux a donné le moyen de reconnaître si l'équation $V = 0$ existe et de la trouver quand elle existe.

Mais, une fois connue cette équation $V = 0$ d'ordre plus ou moins élevé, comment s'en servir pour découvrir l'intégrale générale de la proposée? Nous montrons qu'une seule équation $V = 0$, contenant une fonction arbitraire, suffit pour trouver l'intégrale générale de la proposée, et cela quelque élevé que soit l'ordre de $V = 0$; que cette équation $V = 0$, si élevé qu'en soit l'ordre, joue en quelque sorte le même rôle que si c'était une intégrale *intermédiaire*, c'est-à-dire une équation du premier ordre; et aussi bien que, si la proposée admettait une intégrale intermédiaire, son intégrale peut être définie par des équations à différences ordinaires.

IX. — APPLICATIONS DIVERSES DE LA MÉCANIQUE.

Nouveau siphon projeté et construit par l'auteur pour le passage de l'égout collecteur de Bercy par-dessus le canal Saint-Martin (1879-1880).

(Construit pour le service de la ville de Paris.)

(Cet ouvrage est placé près de l'embouchure en Seine du canal Saint-Martin, au point sur lequel le boulevard Morland franchit le canal. Un modèle en vraie grandeur, expérimenté depuis près d'un an, existe dans la cour de l'usine de la ville de Paris, 31, quai d'Austerlitz.)

Ayant, comme ingénieur de la ville de Paris, à faire passer un égout d'une rive à l'autre du canal Saint-Martin, nous nous sommes proposé, afin d'éviter les difficultés d'exécution et d'entretien que peuvent faire naître les travaux sous l'eau, au lieu de le faire passer sous le canal, comme avaient fait MM. Belgrand et Buffet dans leur magnifique travail du passage d'un collecteur à travers la Seine, de le faire passer *par-dessus* le canal, réalisant ainsi, pour la première fois, croyons-nous, sur une aussi vaste échelle, le véritable siphon de la Physique.

Chacun de nos siphons, au nombre de deux, est en effet formé d'un tube en fonte de $0^m,60$ de diamètre, d'environ 18^m de corde et 8^m de flèche ou hauteur d'aspiration, c'est-à-dire presque la hauteur d'aspiration d'une excellente pompe. Ils sont accolés aux deux têtes du pont sur lequel le boulevard Morland franchit le canal Saint-Martin.

Nous voyions bien des moyens d'amorcer un siphon de cette nature; mais la difficulté était d'assurer le maintien de cet amorçage. M. Cornu, que nous avons consulté à ce sujet, nous a conseillé l'emploi d'une trompe. Ainsi, la première idée de l'emploi de la trompe comme moyen d'assurer le maintien de l'amorçage est entièrement due au savant physicien.

Il s'agissait d'examiner si cette idée serait pratiquement réalisable.

Trois questions étaient à résoudre pour cela.

1° Pourrait-on constituer des trompes assez puissantes pour évacuer tous les gaz qui se dégageraient à l'intérieur du siphon? Il faut remarquer, en effet, que l'eau, au pied du siphon, est soumise à la pression atmosphérique représentée, en nombre rond, par une colonne d'eau d'une hauteur de. . . . . 10^m.

Arrivée au sommet du siphon, qui, en cas de basses eaux, est à 8^m plus élevée, elle n'est plus soumise qu'à la pression de . . . . . 2^m.

Ainsi, chaque litre d'eau, en passant du pied au sommet du siphon, est dans le même cas que si on la plaçait sous une cloche dans laquelle on ferait le vide jusqu'à $\frac{1}{5}$ d'atmosphère. Or, dans ces conditions, même l'eau potable et, à plus forte raison l'eau d'égout, dégage une grande quantité de gaz.

2° La trompe supposée construite avec la puissance voulue pour évacuer ces gaz, son fonctionnement ne coûtera-t-il pas trop cher?

Une trompe est en effet un appareil extrêmement commode, mais ayant, comme il est aisé de s'en convaincre, un rendement mécanique très faible, c'est-à-dire dépensant un grand volume d'eau en proportion du volume de gaz qu'il évacue. Dans les laboratoires, cette question est secondaire, les trompes ayant des ouvertures presque capillaires; mais ici elle devenait extrêmement importante et demandait une étude spéciale.

3° Pendant son fonctionnement, il pourrait arriver que la trompe aspirât non seulement les gaz accumulés au sommet du siphon, mais

encore de l'eau du siphon, et, comme cette eau est très chargée, la trompe serait à tout instant exposée à s'obstruer.

Il n'y avait pas à songer à interposer un grillage; le grillage devait, en effet, avoir ses mailles encore plus petites que l'ouverture des trompes et s'obstruer *a fortiori*, et, comme il serait à l'intérieur du siphon, la désobstructinn serait une opération très difficile et à renouveler incessamment.

Notre appareil fonctionne à titre d'essai et avec ses véritables dimensions depuis près d'un an à l'usine de la ville de Paris, 31, quai d'Austerlitz. L'expérience a consacré la solution que nous avons donnée des difficultés que nous venons de signaler. De plus, nous avons pu constituer des trompes assez puissantes non seulement pour assurer le *maintien* de l'amorçage une fois fait, mais pour *produire* l'amorçage en faisant le vide dans une capacité de près de 15^{mc} ou 15000^{lit} d'air en moins de dix minutes.

Les siphons définitifs sont terminés, sauf quelques détails sans importance; l'un d'eux a été mis en service le 3 mars; le premier amorçage s'est fait en neuf minutes avec l'eau de Vanne, et en quatorze minutes avec l'eau d'Ourcq (dont la pression en ce point n'est que de 8^{m} à 10^{m} suivant les heures). Une de nos trompes maintient le siphon en service sans difficulté, en ne fonctionnant que par intermittence, au moyen d'un flotteur disposé de façon à faire marcher la trompe toutes les fois que le siphon a une tendance à se désamorcer et à arrêter la trompe dès que le réamorçage du siphon est complet. Nos trompes ont une puissance égale à 18 000 trompes comme celles en usage dans les laboratoires.

Balayeuse chasse-neige mécanique (*système Maurice Levy*) (1879-1880).

(Construite pour le service de la ville de Paris.)

Appareil imaginé et expérimenté pendant la récente période de neige, ayant pour objet de permettre, en cas de chute de neige, d'ouvrir plus rapidement, dans le milieu des chaussées, une voie praticable pour deux voitures.

Cet engin a été essayé devant une Commission composée de MM. les ingénieurs de la voie publique de la ville de Paris.

Voici un extrait du Rapport de M. l'ingénieur en chef Humblot de ce service :

« La machine de M. Levy peut, dans les conditions où elle est établie, rendre de très grands services.

» D'abord, la modification qu'elle demande à nos balayeuses est simple; un nouveau brancard à boulonner suffit pour y adapter le chasse-neige, et la balayeuse peut fonctionner comme s'il n'y était pas. Cette transformation revient à 300^{fr}. »

Conclusion : « Nous proposons d'adapter au tiers des balayeuses de la ville, soit cinquante, le chasse-neigo de M. Levy. »

Dragueuse à neige imaginée par l'auteur et construite à titre d'essai pour le service de la ville de Paris.

Appareil destiné surtout, dans la pensée de l'auteur, au déblaiement des voies de tramways. Il a pour objet d'utiliser la force motrice dont disposent les Compagnies de tramways pour obtenir *mécaniquement :* 1° le déblaiement de la neige tombée sur la largeur des voies ferrées; 2° son ramassage et son chargement en wagon, pour être transportée immédiatement sur rails hors Paris.

Essayé devant les ingénieurs de la ville de Paris, et à diverses reprises, par l'auteur, il a très bien réussi ; mais, comme il exige un matériel spécial qui ne pourrait être utilisé qu'en cas de chute de neige, c'est-à-dire rarement, son adoption n'a pas encore été décidée.

L'appareil qui fait l'objet de l'article précédent a, au contraire, l'avantage d'exiger peu de matériel nouveau et d'utiliser les balayeuses mécaniques qui fonctionnent journellement dans les rues de Paris, en les transformant en balayeuses chasse-neige. C'est ce qui fait qu'il a été accueilli, en principe, aussitôt que l'expérience en avait démontré l'efficacité.

Nouveau treuil de manœuvre des hausses des barrages de la Seine (1869).

(Projeté et construit pour le service de la navigation de la Seine.)

Appareil adopté, par décision ministérielle, pour tous les déversoirs des barrages de la haute Seine et de l'Yonne. Précédemment les manœuvres étaient dangereuses.

Signalé dans le *Cours de Navigation* publié par M. l'ingénieur en chef de Lagrené.

Étude d'un nouveau système de barrage mobile manœuvrable depuis la rive par la pression de l'eau.

Trois articles des Annales industrielles, 1873, t. II; 1874, t. I.
Chéry, Grandes voies de communication.

Barrage dérivé du barrage Desfontaines, mais applicable à de plus grandes chutes.

Enseigné dans le cours *Grandes voies de communication,* professé à l'École d'application de Fontainebleau par M. le commandant Chéry.

Sur un système très simple de vanne à débit constant.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 29 novembre 1869.

Sur une application industrielle du théorème de Gauss relatif à la courbure des surfaces.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 14 janvier 1878.

Sur un nouveau système de pont biais.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences du 22 novembre 1869.

X. — INDICATION DE QUELQUES TRAVAUX D'INGÉNIEUR.

Travaux d'amélioration de la haute Seine (1868-1871).

Pendant les campagnes de 1869 et 1870, nous avons projeté et exécuté, sous la direction de M. l'ingénieur en chef Cambuzat, pour environ 1500000fr de travaux, aux sept barrages éclusés de la Seine compris entre Montereau et le département de Seine-et-Oise. Ces travaux comprenaient : 1° sept passerelles à fermettes mobiles pouvant être couchées lors des crues, à établir devant les déversoirs des barrages; 2° la reconstruction des sas des sept écluses accolées à ces barrages. Ces sas sont, comme on sait, les plus grands que nous ayons en France. Ils ont chacun 192m de longueur et peuvent recevoir, à la fois, des convois de douze bateaux de 30m de longueur.

C'est à l'occasion de ces travaux que nous avons construit l'engin employé aujourd'hui pour la manœuvre des barrages de la haute Seine et de l'Yonne dont il est parlé plus haut.

Avant-projet d'amélioration du canal du Loing (1868-1871).

A la même époque, nous avons dressé les projets relatifs aux travaux d'amélioration du canal du Loing, travaux évalués à 2100000fr.

Bassin de la Place du Trône (1874).

Ce bassin, de 50m de diamètre, avec gerbe centrale se projetant sur la moitié de la surface du bassin, est le premier qui ait été exécuté dans ces dimensions. Depuis, on en a exécuté deux semblables : l'un, à l'occasion de l'Exposition universelle, devant le palais du Trocadéro; l'autre, place d'Italie.

Nos dessins nous ont été demandés pour ces deux projets.

Travaux d'assainissement du quartier de Bercy (1879-1880).

Ce qui a rendu ce travail intéressant, c'est que, les égouts de Bercy étant plus bas que le collecteur dans lequel on devait les recueillir, l'emploi de pompes élévatoires devait sembler indispensable; et, en effet, le terrain avait été acheté à cet effet.

Nous avons pu les éviter par une série d'artifices, en profitant de toutes les circonstances favorables que pouvait présenter le terrain. Aussi l'ingénieur en chef a pu dire, dans son Rapport sur notre projet, que c'était un des rares problèmes d'ingénieur *déterminé*.

En effet, on ne pourrait pas déplacer horizontalement ou verticalement l'axe du collecteur que nous venons de construire rue de Bercy, sur quelque point que ce fût, sans que l'égout sortît de terre sur ce point ou ailleurs.

C'est pour faire passer cet égout à travers le canal Saint-Martin qu'a été construit le siphon dont il est parlé plus haut.

5983 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.